

Prof. Rafael Holdorf Lopez, Dr.

## **ECV5220: Estruturas estaticamente indeterminadas**

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Departamento de Engenharia Civil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

Brasil

Agosto, 2018



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO AS ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.1</b>	<b>Cálculo de deslocamentos pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1.1	Exemplo - Viga em balanço . . . . .	6
1.1.2	Exemplo - Pórtico simples . . . . .	7
<b>1.2</b>	<b>Método das Forças . . . . .</b>	<b>9</b>
1.2.1	Exemplo - viga engastada-apoiada . . . . .	10
1.2.2	Exemplo - Pórtico simples . . . . .	12
1.2.3	Generalização do método para n incógnitas . . . . .	15
1.2.4	Exemplo - viga engastada com dois apoios . . . . .	16
<b>2</b>	<b>EFEITOS DOS MODELOS DE ENGENHARIA . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelos de engenharia . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1.1	Modelo de Treliça . . . . .	21
2.1.2	Modelos de vigas . . . . .	22
<b>2.2</b>	<b>Efeito dos modelos de vigas nas estruturas isostáticas . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>2.3</b>	<b>Efeito dos modelos de vigas nas estruturas hiperestáticas . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.4</b>	<b>Efeito da hiperestaticidade no projeto de estruturas . . . . .</b>	<b>31</b>



# 1 Introdução as estruturas hiperestáticas

O principal objetivo da primeira parte da disciplina é identificar as principais diferenças entre o comportamento de estruturas isostáticas e hiperestáticas. Para tanto, vamos estudar dois casos:

- influência do modelo de engenharia
- consequências no procedimento de projeto estrutural

As perguntas a serem respondidas são:

- a escolha do modelo de engenharia tem alguma consequência quando lidamos com estruturas hiperestáticas?
- o procedimento de projeto estrutural de estruturas hiperestáticas pode ser o mesmo de isostáticas?

Para garantir a segurança e bom funcionamento estrutural, as normas de projeto estrutural, normalmente, sugerem verificações de Estado Limite de Serviço (ELS) e Estado Limite Último (ELU). O primeiro está ligado a deslocamentos e rotações nas estruturas, ou seja, precisamos estar aptos a avaliar estas quantidades para no futuro aplicar as recomendações normativas. Já o ELU está usualmente associado com modos de falha em tensão (existem outras grandezas envolvidas, mas vamos nos limitar aqui a tensão). Consequentemente, precisamos de um ferramental apto a realizar a análise de esforços (resumidos em diagramas) para então avaliar a tensão atuante na estrutura. Com isso, as respostas das perguntas acima serão respondidas sempre analisando o comportamento das estruturas hiperestáticas e seu impacto na avaliação dos ELS e ELU.

O chamada Método das Forças é utilizado neste capítulo para desenvolvermos exemplos didáticos e práticos para nos responder estas questões.

## 1.1 Cálculo de deslocamentos pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é um método baseado na conservação de energia e afirma que o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo:

$$1 * \Delta = \int_0^L \frac{Nn}{EA} dx + \int_0^L f_c \frac{Pp}{GA} dx + \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx + \int_0^L \frac{Tt}{GJ} dx \quad (1.1)$$

Onde:

- $N$ ,  $P$ ,  $M$  e  $T$  são os esforços internos gerados pelo carregamento REAL;
- $n$ ,  $p$ ,  $m$  e  $t$  são os esforços internos gerados pelo carregamento VIRTUAL;

- O valor 1 refere-se à magnitude do carregamento virtual, escolhido por conveniência;
- $\Delta$  equivale ao deslocamento ou rotação no ponto desejado.

A esquerda da igualdade equivale ao trabalho virtual externo na estrutura e a direita equivale ao trabalho virtual causado pelos esforços internos na estrutura, para a carga virtual aplicada. A dedução dessa equação é encontrada nos livros de resistência de materiais.

### 1.1.1 Exemplo - Viga em balanço

Calcular o deslocamento vertical no balanço para a viga abaixo, considerando apenas a parcela de flexão.

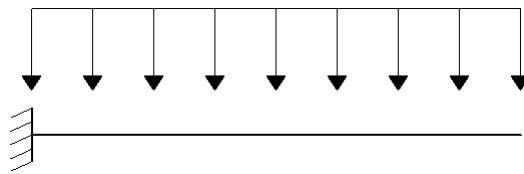


Figura 1 – Viga em balanço com carga uniformemente distribuída.

Para calcular o deslocamento no balanço, será aplicada uma carga unitária no nó de interesse, que será nossa carga virtual:

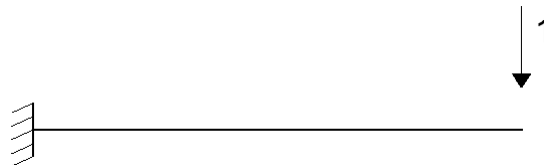


Figura 2 – Carga unitária aplicada no balanço.

O primeiro passo, neste caso, é calcular o momento fletor ao longo da viga, para a estrutura real (com os carregamentos originais) e o momento fletor causado por uma carga unitária no nó de interesse.

Para a estrutura real:

$$M(x) = \frac{-qx^2}{2}$$

Para a estrutura virtual:

$$m(x) = -x$$

O trabalho externo realizado pela carga virtual unitária no ponto B será dado por:

$$W_{ext} = 1 * \delta_B$$

O trabalho interno na estrutura será, considerando apenas a parcela de flexão:

$$W_{int} = \int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI} dx$$

Usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$W_{ext} = W_{int}$$

E com isso calcula-se o deslocamento:

$$\delta_B = \int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{\left(\frac{-qx^2}{2}\right) * (-x)}{EI} = \frac{qL^4}{8EI}$$

O sinal positivo do deslocamento indica que ele ocorre no mesmo sentido arbitrado para a carga unitária.

### 1.1.2 Exemplo - Pórtico simples

Calcular o deslocamento horizontal no apoio da direita para o pórtico apresentado, considerando apenas a parcela de flexão e  $EI = 2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ .

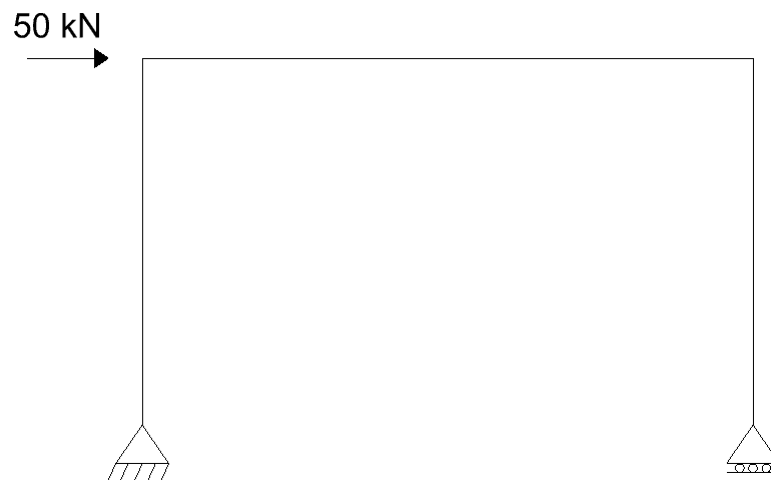


Figura 3 – Pórtico isostático com carga horizontal.

Para calcular o deslocamento, será aplicada uma carga unitária no nó de interesse, que será nossa carga virtual:



Figura 4 – Pórtico isostático com carga horizontal.

Neste caso, foi aplicada uma carga unitária horizontal, para a esquerda.

O primeiro passo é calcular o momento fletor ao longo do pórtico, para a estrutura real (com os carregamentos originais) e o momento fletor causado pela carga unitária. Por conveniência, a estrutura será dividida em três barras: as duas barras verticais e a barra horizontal superior, conforme figura abaixo:



Figura 5 – Divisão da estrutura em barras.

Para a estrutura real:

$$M_1(x) = 50x$$

$$M_2(x) = 150 - 30x$$

$$M_3(x) = 0$$

Para a estrutura virtual:

$$m_1(x) = -x$$

$$m_2(x) = -3$$

$$m_3(x) = -x$$

O trabalho externo realizado pela carga virtual unitária no apoio B será dado por:

$$W_{ext} = 1 * \delta_B$$

O trabalho interno na estrutura será, considerando apenas a parcela de flexão:

$$W_{int} = \int_L \frac{M(x)m(x)}{EI} dx = \int_0^3 \frac{M_1(x)m_1(x)}{EI} dx + \int_0^5 \frac{M_2(x)m_2(x)}{EI} dx + \int_0^3 \frac{M_3(x)m_3(x)}{EI} dx$$

Usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$W_{ext} = W_{int}$$



E com isso calcula-se o deslocamento:

$$\begin{aligned}\delta_B &= \int_0^3 \frac{(50x) * (-x)}{EI} dx + \int_0^5 \frac{(150 - 30x) * (-3)}{EI} dx + \int_0^3 \frac{(0) * (-x)}{EI} dx \\ &= \int_0^3 \frac{-50x^2}{EI} dx + \int_0^5 \frac{90x - 450}{EI} dx \\ &= \left[ \frac{-50x^3}{3EI} \right]_0^3 + \left[ \frac{90x^2}{2EI} - \frac{450x}{EI} \right]_0^5 \\ &= \frac{-450}{EI} + \frac{1125}{EI} - \frac{2250}{EI} = \frac{-1575}{EI}\end{aligned}$$

Para o valor de rigidez adotado,  $\delta_B = -0.7875$  cm. O sinal negativo do deslocamento indica que ele ocorre no sentido oposto ao arbitrado para a carga unitária, o que era esperado.

## 1.2 Método das Forças

Nos exemplos anteriores, as estruturas analisadas eram estaticamente determinadas, ou seja, o número de equações da estática eram suficientes para calcular as reações de apoio. Porém, na maioria dos modelos de engenharia, as estruturas analisadas possuem mais incógnitas (reações de apoio) do que equações da estática, necessitando de equações auxiliares para serem resolvidas. Essas estruturas, quando restringidas, são chamadas de estruturas hiperestáticas.

O método das forças ou método da flexibilidade, utiliza as condições de compatibilidade de deslocamentos para determinar as redundantes estáticas, obtendo as reações de apoio da estrutura. Este método tem como hipótese que a estrutura está em regime elástico-linear, com pequenos deslocamentos e deformações, fazendo o uso do Princípio da Superposição de Efeitos (PSE).

A sequência do método consiste em:

- Liberar a estrutura, deixando-a isostática;
- Utilizar o PSE para decompor a estrutura em sistemas;
- Determinar os deslocamentos;
- Aplicar a condição de compatibilidade;
- Calcular esforços e deformações.

No primeiro item acima é feita a liberação da estrutura inicial, para obter uma estrutura isostática, eliminando apoios. Ao eliminar um apoio, permite-se o deslocamento naquele ponto. De forma a garantir a restrição inicial do apoio, a soma dos deslocamentos gerados pela liberação do apoio deve ser igual ao deslocamento inicial no apoio (normalmente zero). Essa condição de deslocamento nos apoios é chamada da condição de compatibilidade de deslocamentos. Por outro lado, ao liberar a estrutura, a reação do apoio eliminado será inserida na estrutura como força externa, sendo chamada de hiperestático.

### 1.2.1 Exemplo - viga engastada-apoiada

Calcular as reações de apoio da viga e traçar os diagramas de esforços. Considerar apenas efeito de flexão na deformação e rigidez constante.

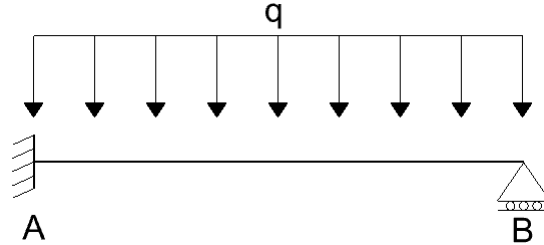


Figura 6 – Viga hiperestática.

Etapa 1: liberar a estrutura. O apoio B será removido, transformando a estrutura em uma viga em balanço e tornando o problema isostático.

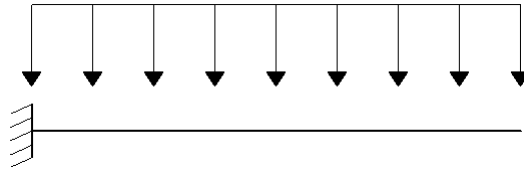


Figura 7 – Eliminando apoio.

Etapa 2: decompor a estrutura. A estrutura será dividida em duas: estrutura inicial sem o apoio B (chamada aqui de sistema 0) e estrutura com o hiperestático (chamada aqui de sistema 1).

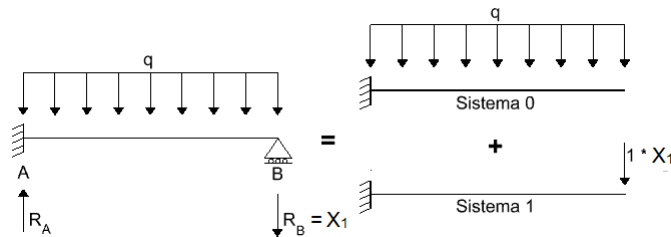


Figura 8 – Dividindo estrutura em sistemas.

Etapa 3: calcular os deslocamentos para cada sistema.

Para a viga em balanço do sistema 0, este deslocamento foi calculado no item 1.1.1:

$$\delta_{10} = \frac{qL^4}{8EI}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o deslocamento causado pelo carregamento  $j$  no grau de liberdade (deslocamento ou rotação) associado ao hiperestático  $i$ . Por exemplo,  $\delta_{10}$  é o deslocamento vertical no ponto B (movimento restringido pelo hiperestático  $X_1$ , então  $i = 1$ ) pelo carregamento externo (para carregamento externo, sempre  $j = 0$ ).

Resta calcular o deslocamento para o sistema 1, o qual será denominado de  $\delta_{11}$ : deslocamento vertical no ponto B (movimento restringido pelo hiperestático  $X_1$ , então  $i = 1$ ) pela carga unitária associada ao hiperestático  $X_1$  (então,  $j = 1$ ). Neste sistema, deverá ser calculado o deslocamento causado pela carga unitária aplicada na direção do hiperestático 1 ( $X_1$ ). Desta forma, a estrutura real e virtual, neste sistema, são iguais e formadas pela carga unitária na ponta do balanço. Assim, do item 1.1.1, tira-se que:

$$M(x) = m(x) = -x.$$

O trabalho externo realizado pela carga virtual unitária no ponto B será dado por:

$$W_{ext} = 1 * \delta_{11}$$

O trabalho interno na estrutura será, considerando apenas a parcela de flexão:

$$W_{int} = \int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M(x)m(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI}$$

Etapa 4: aplicar a condição de compatibilidade.

Ao dividir o problema inicial nos sistemas 0 e 1, manteve-se as mesmas condições de esforços na estrutura, porém perde-se a condição de deslocamento vertical no apoio B. Para restaurar essa condição, deve-se igualar a soma dos deslocamentos dos sistemas em B ao deslocamento final do apoio B, ou seja, zero:

$$\delta_B = \delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0$$

Dessa equação, tira-se o valor de  $R_B = X_1$ :

$$R_B = X_1 = -\frac{3qL}{8}$$

O sinal negativo indica que a direção considerada para a reação de apoio é o contrário do estipulado na Figura 8.

Com essa reação calculada, as demais reações podem ser calculadas com as equações de equilíbrio da estática:

$$H_A = 0$$

$$R_A = -\frac{5qL}{8}$$

$$M_A = \frac{qL^2}{8}$$

Para  $q = 10kN/m$  e  $L = 3m$ , pode-se obter os diagramas de esforços da viga:

Com este exemplo, foi possível calcular as reações de apoio de uma viga hiperestática usando o método das forças.

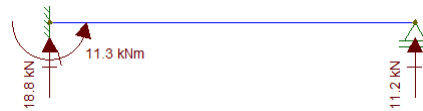


Figura 9 – Reações de apoio.

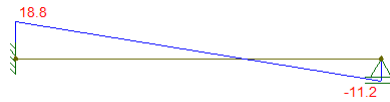


Figura 10 – Diagrama de esforço cortante.

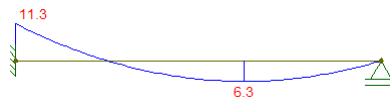


Figura 11 – Diagrama de momento fletor.

### 1.2.2 Exemplo - Pórtico simples

Calcular as reações de apoio do pórtico e traçar os diagramas de esforços. Considerar apenas efeito de flexão na deformação e rigidez constante.



Figura 12 – Pórtico hiperestático.

Etapa 1: liberar a estrutura. Neste exemplo será removido a restrição horizontal no apoio B, transformando a estrutura no pórtico isostático da Figura 3.

Etapa 2: decompor a estrutura. A estrutura será dividida em duas: estrutura inicial sem o apoio B (chamada aqui de sistema 0) e estrutura com o hiperestático (chamada aqui de sistema 1).

Etapa 3: calcular os deslocamentos para cada sistema.

Neste problema vamos assumir que as parcelas de cisalhamento e axial podem ser desprezadas para o cálculo dos equacionamentos. Para o pórtico do sistema 0, este deslocamento foi calculado no item 1.1.2:

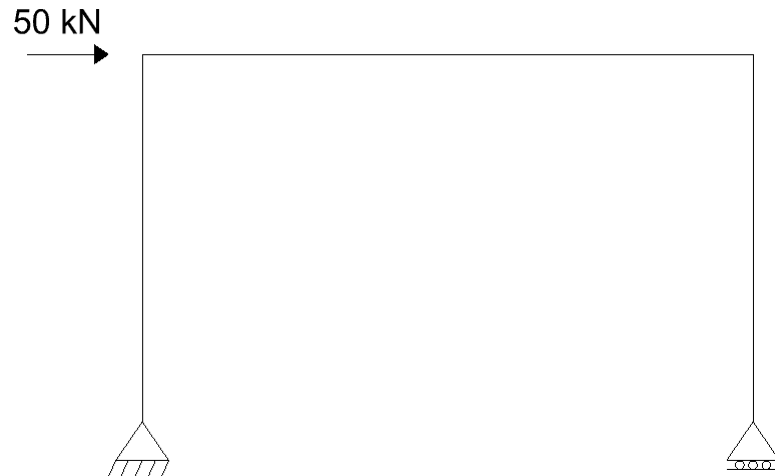


Figura 13 – Liberando apoio.

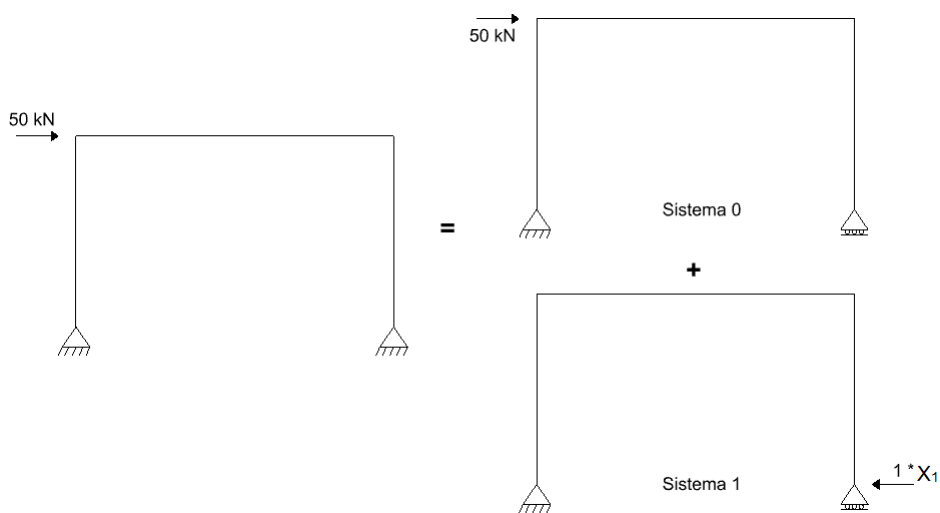


Figura 14 – Dividindo estrutura em sistemas.

$$\delta_{10} = \frac{1575}{EI}$$

Resta calcular o deslocamento para o sistema 1. Assim, do item 1.1.2, tira-se que:

$$M_1(x) = m_1(x) = -x$$

$$M_2(x) = m_2(x) = -3$$

$$M_3(x) = m_3(x) = -x$$

O trabalho externo realizado pela carga virtual unitária no ponto B será dado por:

$$W_{ext} = 1 \cdot \delta_{11}$$

O trabalho interno na estrutura será, considerando apenas a parcela de flexão:

$$W_{int} = \int \frac{M(x)m(x)}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{63}{EI}$$

Etapa 4: aplicar a condição de compatibilidade.

Para restaurar a compatibilidade de deslocamento horizontal no apoio B:

$$\delta_B = \delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0$$

Dessa equação, tira-se o valor de  $H_B = X_1$ :

$$R_B = X_1 = 25kN$$

O sinal positivo indica que a direção considerada para a reação de apoio é a mesma do estipulado na figura 14.

Com essa reação calculada, as demais reações podem ser calculadas com as equações de equilíbrio da estática:

$$H_A = 25kN$$

$$R_A = -30kN$$

$$R_B = 30kN$$

Com as reações calculadas, pode-se obter os diagramas de esforços do pórtico:



Figura 15 – Reações de apoio.

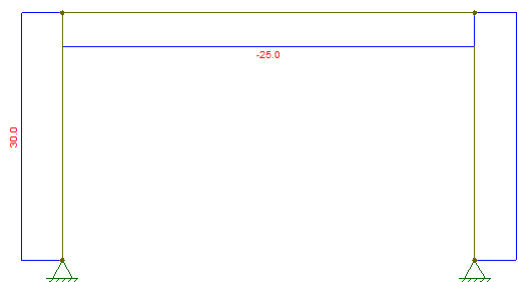


Figura 16 – Diagrama de esforço normal.

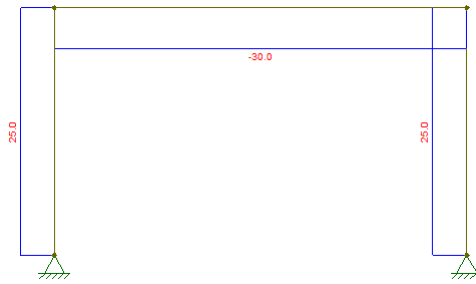


Figura 17 – Diagrama de esforço cortante.

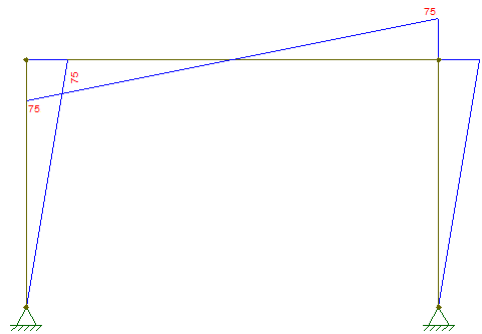


Figura 18 – Diagrama de momento fletor.

### 1.2.3 Generalização do método para n incógnitas

Até este momento, os exemplos usados tinham apenas um grau de estaticidade, ou seja, possuíam apenas uma restrição a mais do que uma estrutura isostática. Porém, a estrutura poderá ter um grau de estaticidade maior. Neste caso, a sequência do método das forças permanecerá a mesma, porém ao decompor a estrutura teremos mais sistemas, um para o carregamento externo e um para cada hiperestático gerado. A equação para o deslocamento de um nó de determinado hiperestático deverá considerar o efeito de cada hiperestático da estrutura. Em uma estrutura com n hiperestáticos, esta equação ficará, para os deslocamentos de 1 a n:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n \\ \delta_2 &= \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \delta_n &= \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n\end{aligned}$$

Representando matricialmente obtemos a seguinte equação:

$$[\delta](X) = -(\delta_0), \quad (1.2)$$

onde:

$[\delta]$ : matriz de flexibilidade da estrutura

$(X)$ : vetor dos esforços (hiperestáticos)

$(\delta_0)$ : vetor de deslocamento pela ação do carregamento externo

#### 1.2.4 Exemplo - viga engastada com dois apoios

Este é um exemplo similar ao apresentado na subseção 1.2.1, onde agora houve o acréscimo de um apoio no meio do vão da viga. Neste caso aplica-se a generalização do método das forças para a solução do problema. O problema é descrito pela Figura 19, considerando novamente somente o efeito da flexão da deformação e rigidez constante.

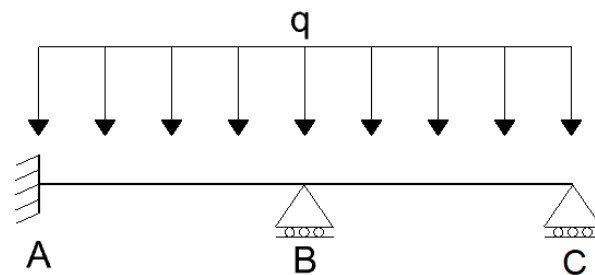


Figura 19 – Representação da estrutura

Realizando-se o mesmo processo descrito anteriormente, libera-se os apoios nos nós B e C, resultando em três sistemas isostáticos com o surgimento dos hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$ .

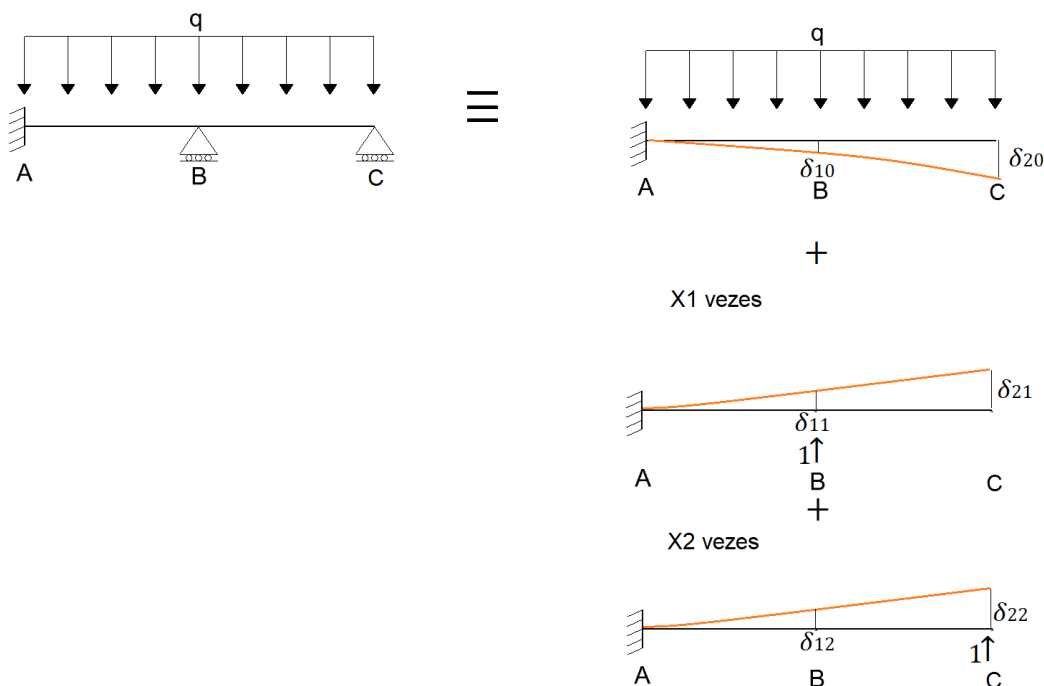


Figura 20 – Decomposição para o método das forças

Para equacionar nossas incógnitas  $X_1$  e  $X_2$ , aplicamos a compatibilidade dos desloca-



mentos. Como não há deslocamento vertical nos apoios B e C, pode-se escrever as seguintes equações:

$$\delta_{10} + X_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} = 0 \quad (1.3)$$

$$\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0. \quad (1.4)$$

Pode-se escrever este sistema de equações de forma matricial, obtendo-se então:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

podendo-se visualizar como a matriz de flexibilidade relaciona o vetor de hiperestáticos com o vetor de deslocamentos causados pelo carregamento externo na estrutura liberada.

Verifiquemos a solução do problema descrito considerando um comprimento da viga de  $L = 5m$  e um carregamento  $q = 20kN/m$ . Primeiramente é necessário que calculemos os deslocamentos da estrutura liberada e na sequência os termos da matriz de flexibilidade de modo a montar a formulação matricial descrita acima.

A estrutura liberada trata-se de um viga engastada com carregamento uniformemente distribuído. Os termos  $\delta_{20}$  e  $\delta_{10}$  são os deslocamento na ponta do balanço e meio do vão.

O deslocamento  $\delta_{20}$  já foi calculado na subseção 1.2.1, sendo:

$$\delta_{20} = -\frac{qL^4}{8EI}. \quad (1.6)$$

O deslocamento no meio do vão  $\delta_{10}$  pode ser calculado novamente pelo princípio dos trabalhos virtuais. Uma outra maneira, ilustrada abaixo seria pelo uso da equação da linha elástica para vigas engastadas. Tem-se que o deslocamento desta viga pode ser descrito por:

$$v(x) = \frac{-q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) \quad (1.7)$$

Assim, substituindo-se  $x = L/2$ , obtém-se:

$$\delta_{10} = v(L/2) = \frac{-17qL^4}{384EI} \quad (1.8)$$

O termo  $\delta_{11}$  será calculado pelo princípio dos trabalhos virtuais. Nota-se que não existem cargas posteriores ao meio do vão, de modo que é possível ser utilizado um eixo auxiliar  $x_1$  iniciando-se de  $L/2$  em direção ao engaste de modo a simplificar a integração. Uma vez que já existe uma carga unitária na direção do deslocamento buscado, verifica-se que:

$$M(x_1) = m(x_1) = 1x_1. \quad (1.9)$$

Portanto, realizando-se a integração obtém-se:

$$\delta_{11} = \int_0^{L/2} \frac{Mm}{EI} dx_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} x_1^2 dx_1 = \frac{L^3}{24EI} \quad (1.10)$$

Utilizando-se o mesmo eixo auxiliar, uma vez que o carregamento unitário encontra-se no meio do vão, pode-se calcular o termo  $\delta_{21}$  da matriz de flexibilidade. Quanto aos momentos, obtém-se:

$$M(x_1) = x_1 \quad (1.11)$$

$$m(x_1) = x_1 + L/2. \quad (1.12)$$

integrando-se novamente de 0 à  $L/2$ :

$$\delta_{21} = \int_0^{L/2} \frac{Mm}{EI} dx_1 = \int_0^{L/2} \frac{x(x + L/2)}{EI} dx_1 = \frac{5L^3}{48EI}. \quad (1.13)$$

O termo  $\delta_{12}$  é idêntico ao já calculado  $\delta_{21}$  uma vez que a carga real considerada é unitária. Aplicaríamos uma carga virtual no nó B, e o produto entre os diagramas de momento real e virtual somente seria diferente de zero para  $0 \leq x_1 \leq L/2$ , de forma similar ao que ocorreu acima. A única diferença seria a inversão entre a expressão para o momento real e o virtual. Assim:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{5L^3}{48EI} \quad (1.14)$$

Por fim, teríamos o termo  $\delta_{22}$  que já foi calculado no problema da viga engastada com somente um apoio. Nesse caso:

$$M(x) = x, m(x) = x, \quad (1.15)$$

e

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI}. \quad (1.16)$$

Substituindo as expressões encontradas para os valores do problema proposto ( $q = 20\text{KN/m}$  e  $L = 5\text{m}$ ), obtém-se:

$$\delta_{10} = \frac{-17qL^4}{384EI} = -\frac{553385.41}{EI} \quad (1.17)$$

$$\delta_{20} = -\frac{qL^4}{8EI} = -\frac{1562500}{EI} \quad (1.18)$$

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{24EI} = \frac{5.21}{EI} \quad (1.19)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{5L^3}{48EI} = \frac{13.02}{EI} \quad (1.20)$$

$$\delta_{22} = \frac{L^3}{3EI} = \frac{41.67}{EI} \quad (1.21)$$

Supondo a viga inteira com um valor de  $EI$  constante, monta-se a formulação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5.21 & 13.02 \\ 13.02 & 41.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 553385.41 \\ 1562500 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Solucionando este sistema linear, encontramos os valores para os hiperestáticos, que correspondem às reações nos apoios:

$$X_1 = 57.14kN \text{ e } X_2 = 19.64kN \quad (1.23)$$

A partir do cálculo dos hiperestáticos pode-se continuar com a análise utilizando-se o princípio da superposição e calcular as outras reações e diagramas, como o diagrama de momentos fletores exemplificado na Figura 21.

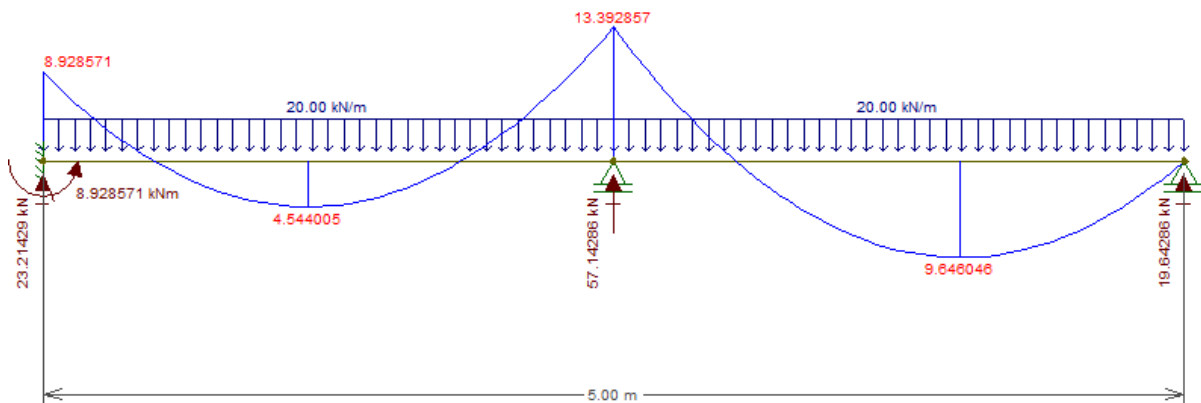


Figura 21 – Diagrama de momentos fletores



## 2 Efeitos dos modelos de engenharia

### 2.1 Modelos de engenharia

Um primeiro conceito que é necessário ter em mente é que para o desenvolvimento de projetos em engenharia precisamos utilizar modelos. Tais modelos são abstrações simplificadas do que acontece na realidade: modelos **aproximam** o comportamento real. Estas simplificações são feitas através das hipóteses do modelo. Como consequência direta, tudo que calculamos com auxílio de modelos tem erros, e cabe ao engenheiro escolher um modelo adequado a atividade desejada. Em outras palavras, o engenheiro deve escolher o modelo cujo erro esteja em um nível aceitável e não invalide sua análise.

É possível exemplificar estes conceitos na engenharia estrutural analisando os modelos de treliça e vigas.

#### 2.1.1 Modelo de Treliça

O modelo estrutural de treliças tem como ideia central assumir que o comportamento de um sólido tridimensional pode ser aproximado por um conjunto de barras unidimensionais as quais são submetidas somente à esforço axial. Para tanto, são necessárias as seguintes hipóteses básicas:

- os carregamentos são aplicados somente nas rótulas e não existe nenhuma excentricidade
- não há nenhuma transmissão de momento fletor nas ligações entre barras da treliça (rótula perfeita)

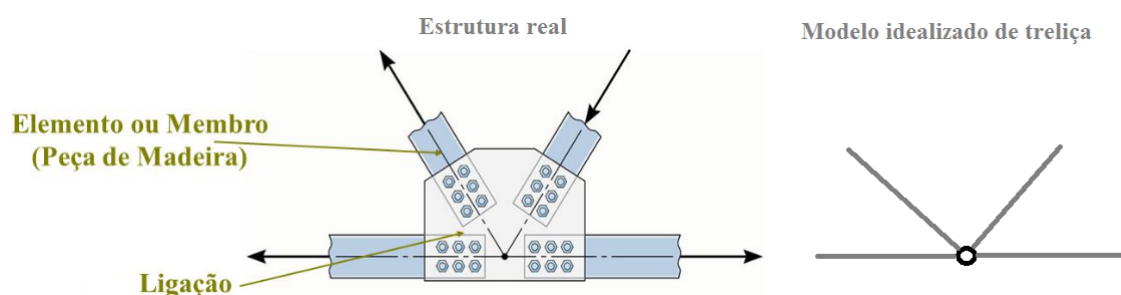


Figura 22 – Hipótese das rótulas em modelos de treliça.

Olhando para a Figura 22, vemos que o que idealizamos como uma rótula perfeita é na realidade uma placa metálica presa aos membros estruturais com vários parafusos, ou seja, uma estrutura com alguma rigidez. Então, obviamente, ocorre a transmissão de algum momento por esta ligação. Entretanto, pela experiência do projetista, tal momento é relativamente baixo na maioria das aplicações de engenharia estrutural e é normalmente desconsiderado da análise.

À partir da simples análise acima, podemos inferir então que não existe rótula perfeita (nenhuma transmissão de momento) e nem engaste perfeito (transmissão total de momento). Os exemplos de simplificações de modelos estruturais são inúmeros. No próximo item, vamos aprofundar um pouco mais este conceito na construção de modelos de vigas.

### 2.1.2 Modelos de vigas

Um exemplo cotidiano em engenharia estrutural são os modelos de vigas. A suposição básica do modelo de viga é que conseguimos descrever o comportamento de uma estrutura que na realidade tem 3 dimensões por um modelo retilíneo, onde o seu comprimento é bem superior as dimensões da seção transversal.

Dentre os inúmeros modelos de viga que já foram propostos, normalmente, começa-se o estudo pelo modelo Clássico ou de Euler-Bernoulli. Com efeito, este já foi apresentado e utilizado em disciplinas como Mecânica dos Sólidos I e II, e tem como hipóteses básicas na flexão:

- (1) o comprimento da viga no eixo longitudinal não se altera (Figura 23b)
- (2) qualquer deformação da seção transversal da viga no seu próprio plano é desprezada
- (3) seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação (Figura 23a)

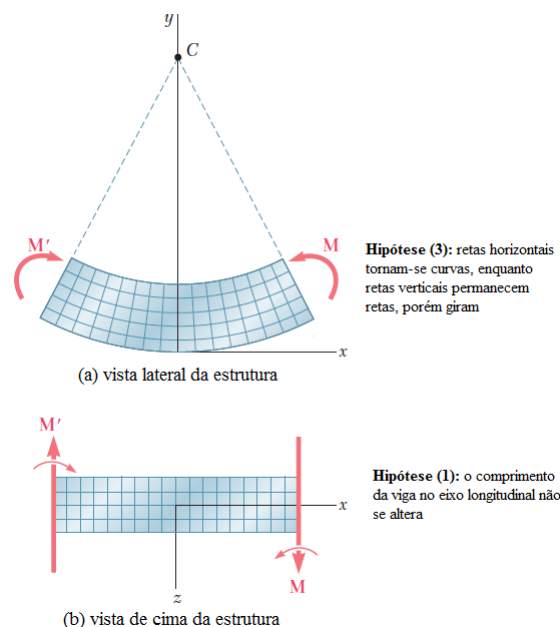


Figura 23 – Hipótese de deformação da viga de Euler-Bernoulli.

A hipótese (3) descrita acima leva a conclusão que a rotação ( $\theta_z$ ) das seções planas em qualquer ponto do eixo longitudinal é dada pela derivada do deslocamento vertical ( $v$ ) em relação à  $x$  ( $\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x}$ ). Isto também é ilustrado na Figura 24. Em termos energéticos, esta hipótese significa que somente a energia de deformação por flexão é considerada para se calcular

a deformação da estrutura. Em outras palavras, a energia de deformação por cisalhamento é desprezada.

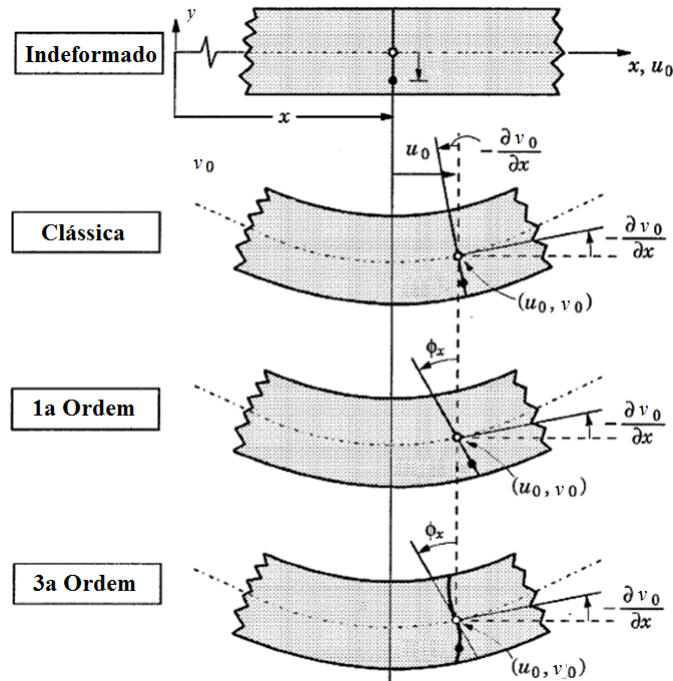


Figura 24 – Configuração de uma viga não deformada e deformada de acordo com as teorias clássica, de primeira ordem e de terceira ordem.

Quando a energia de deformação por cisalhamento é incluída na formulação, a hipótese (3) perde validade, ou seja, as seções planas permanecem planas, porém não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga. O modelo resultante desta inclusão é chamado de modelo de deformação por cisalhamento de Primeira Ordem ou de Timoshenko. Na Figura 24 é possível perceber que as seções planas não são mais perpendiculares ao eixo longitudinal, e que a rotação de uma dada seção é  $\phi_x \neq \theta_z$ . Vale notar aqui este modelo é mais preciso que o de Euler-Bernoulli, uma vez que o primeiro não despreza a parcela de deformação por cisalhamento.

Uma pergunta pertinente é: o modelo de Timoshenko não tem erro? É um modelo exato? Logicamente, a resposta é não. A única inferência que podemos fazer é que o erro do modelo de Timoshenko é menor que o erro do modelo de Euler-Bernoulli. Cabe então ao engenheiro avaliar qual modelo de viga utilizar. Por exemplo, de forma simplificada para vigas prismáticas, temos que se  $h/L \leq 1/20$ , a viga é considerada esbelta e o erro causado pela não consideração da energia de deformação por cisalhamento é desprezível, ou seja, a escolha do modelo de Euler-Bernoulli é adequado.

Outra pergunta que pode vir a mente: estes são os únicos dois modelos de vigas? Não, existem vários modelos, sendo os dois citados aqui os mais comuns. Como curiosidade, a Figura 24 mostra ainda o exemplo de uma teoria de deformação por cisalhamento de Terceira Ordem, onde as seções planas não permanecem planas na deformação. Tal modelo é especialmente útil em estruturas de materiais compostos laminados, como fibra de carbono.

## 2.2 Efeito dos modelos de vigas nas estruturas isostáticas

Esta seção analisará o efeito da utilização de diferentes modelos de vigas nos deslocamentos (ELS) e nos esforços (ELU) de estruturas isostáticas. Para tanto, considere a viga engastada com carregamento uniformemente distribuído ilustrada na Figura .

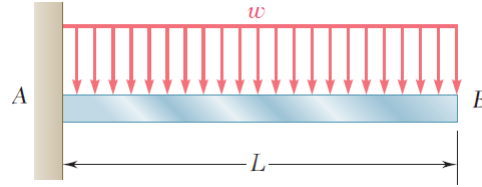


Figura 25 – Viga Engastada com carregamento distribuído  $w$ .

Para efeito de ELS vamos calcular seu deslocamento máximo, o qual ocorre no ponto B. Utilizando o PTV, temos que:

$$W_{int} = \underbrace{\int_0^L \frac{mM}{EI} dx}_{\text{flexão}} + \underbrace{\int_0^L f_c \frac{pP}{GA} dx}_{\text{cisalhamento}}. \quad (2.1)$$

Utilizando somente o termo de flexão, temos o modelo de Euler-Bernoulli, enquanto o modelo de Timoshenko requer os dois termos. Para facilitar nossa análise, vamos dividir o deslocamento do ponto B nestes dois termos:

$$\delta_B = \delta_B^f + \delta_B^c, \quad (2.2)$$

onde  $\delta_B^f$  e  $\delta_B^c$  são os deslocamentos causados no ponto B pela energia de flexão e cisalhamento, respectivamente. Como visto anteriormente, o cálculo dessas parcelas pode ser feito resolvendo as seguintes integrais:

$$\delta_B^f = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx \quad (2.3)$$

$$\delta_B^c = \int_0^L f_c \frac{pP}{GA} dx \quad (2.4)$$

Para o termo da flexão:

$$\delta_B^f = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{wx^3}{2EI} dx = \left[ \frac{wx^4}{8EI} \right]_0^L = \frac{wL^4}{8EI} \quad (2.5)$$

Para o termo do cisalhamento:

$$\delta_B^c = \int_0^L f_c \frac{pP}{GA} dx = \int_0^L f_c \frac{(wx)(1)}{GA} dx = \int_0^L f_c \frac{(wx)}{GA} dx = \left[ f_c \frac{wx^2}{2GA} \right]_0^L = f_c \frac{wL^2}{2GA} \quad (2.6)$$



Tabela 1 – Influência da esbeltez na parcela do deslocamento devido à energia de cisalhamento.

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>	<b>Caso 4</b>	<b>Caso 5</b>
<b>b [m]</b>	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
<b>h [m]</b>	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
<b>L [m]</b>	5	4	3	2	1,5
<b>I [m<sup>4</sup>]</b>	0,00064	0,00125	0,00216	0,00343	0,00512
<b>A [m<sup>2</sup>]</b>	0,048	0,06	0,072	0,084	0,096
<b>Parcela de flexão [cm]</b>	4,883	1,024	0,188	0,023	0,005
<b>Parcela de cisalhamento [cm]</b>	0,038	0,019	0,009	0,003	0,002
<b>Deslocamento total [cm]</b>	4,920	1,043	0,197	0,027	0,007
<b>% Influência cisalham.</b>	0,76%	1,84%	4,58%	12,82%	25,45%

Com as equações dos deslocamentos devido flexão e cisalhamento em mãos, vamos analisar cinco casos com diferentes comprimentos e seções transversais. Os dados utilizados nesta análise estão na Tabela 1, onde a esbeltez da estrutura decresce do Caso 1 ( $\frac{h}{L} = 0.08$ ) até o 5 ( $\frac{h}{L} = 0.53$ ). A ideia aqui é verificar a influência da parcela do cisalhamento com a diminuição da esbeltez.

A maneira mais didática de analisar os dados da Tabela 1 é sua última linha, a qual mostra a porcentagem do deslocamento total que é causada pela energia de cisalhamento. Nota-se que para a estrutura mais esbelta, menos de 1% do deslocamento total é devido ao efeito do cisalhamento, enquanto, no caso menos esbelto, este número sobe para 25%. Uma forma de analisar estas porcentagens é a seguinte: se utilizarmos o modelo de Euler-Bernoulli, o erro do deslocamento total que estamos aproximando é de pelo menos o valor da porcentagem mostrada. Com isso, cabe ao engenheiro definir qual o nível de erro é tolerável para seu projeto de forma a não invalidar suas análises. Uma conclusão importante é que o modelo de viga escolhido altera os resultados de deslocamento para estruturas isostáticas. Conseqüentemente, o modelo tem consequência direta na análise de critérios de ELS no projeto estrutural.

Agora, será avaliado essa situação para um viga de concreto armado de seção retangular. Para estrutura de concreto armado, no item 8.2.9 da norma NBR 6118:2014 está preconizado que o módulo de elasticidade transversal  $G$  pode ser tomado como sendo  $E/2,4$ . Como simplificação, pode-se considerar:

$$G = \frac{2E}{5} \quad (2.7)$$

Para uma viga de seção retangular  $b \times h$ , a inércia pode ser calculada como sendo:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (2.8)$$

Pode-se obter a área  $A = bh$  em função da inércia, usando a equação 2.8:

$$A = \frac{12I}{h^2} \quad (2.9)$$

Substituindo as equações 2.7 e 2.9 em 2.6, pode-se obter:

$$\delta_B^c = \frac{F_s w L^2}{2GA} = \frac{F_s w L^2}{2\left(\frac{2E}{5}\right)\left(\frac{12I}{h^2}\right)} = \frac{5F_s w L^2 h^2}{48EI} \quad (2.10)$$

Reordenando os termos em 2.10 e lembrando que para seção retangular pode-se usar  $F_s = 1, 2 = \frac{6}{5}$ , obtém-se:

$$\delta_B^c = \frac{5F_s w L^2 h^2}{48EI} = \frac{5\frac{6}{5} w L^2 h^2}{48EI} = \frac{w L^2 h^2}{8EI} = \frac{w L^4 h^2}{8EI l^2} = \frac{w L^4}{8EI} \left(\frac{h^2}{l^2}\right) \quad (2.11)$$

Olhando novamente a equação 2.5, percebe-se que o primeiro termo da equação 2.11 acima é igual à parcela referente à flexão. Assim, pode-se reescrever a equação 2.2, do deslocamento em B:

$$\delta_B = \delta_B^f + \delta_B^c = \frac{w L^4}{8EI} + \frac{w L^4}{8EI} \left(\frac{h^2}{l^2}\right) = \frac{w L^4}{8EI} \left(1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right) \quad (2.12)$$

Da equação 2.12, percebe-se que a parcela de cisalhamento do deslocamento é importante se a relação entre a altura da viga e o comprimento for relevante. Para uma situação usual de projeto de engenharia, por exemplo, com uma viga de 4 metros de comprimento e 40 cm de altura, a parcela de cisalhamento representaria um aumento de  $\left(\frac{40}{400}\right)^2 = 1\%$  no deslocamento da viga, o que justifica desprezar esse termo do deslocamento.

Quando lidamos com critérios de ELU, normalmente, temos que obter os esforços máximos que agem na estrutura. Neste exemplo vamos calcular o esforço cortante e momento fletor máximos. Como a estrutura é isostática, conseguimos calcular as reações de apoio com o auxílio das equações da estática, e facilmente, desenhar os diagramas de esforço cortante e momento fletor resultantes, os quais são ilustrados na Figura 26. Nesta figura vemos que os valores máximos de esforço cortante e momento fletor ocorrem no ponto A sendo  $V_A = -wL$  e  $M_A = -\frac{1}{2}wL^2$ , respectivamente.

Aqui é importante notar que **em vigas isostáticas os esforços independem do modelo estrutural escolhido**, pois somente as equações da estática são necessárias. Em outras palavras, o modelo de Euler-Bernoulli e de Timoshenko proporcionam o mesmo resultados para casos isostáticos.

Em suma, nesta seção vimos que, para estruturas isostáticas, modelo estrutural afeta o cálculo dos deslocamentos, e não tem efeito no cálculo dos esforços. Uma pergunta pertinente ao assunto central do conteúdo deste curso: *os esforços são alterados pelo modelo escolhido quando lidamos com estruturas hiperestáticas?*

## 2.3 Efeito dos modelos de vigas nas estruturas hiperestáticas

Para responder a pergunta feita na seção anterior, vamos analisar a estrutura hiperestática mostrada na Figura 27. Nosso objetivo aqui é calcular o momento fletor máximo nesta viga quando

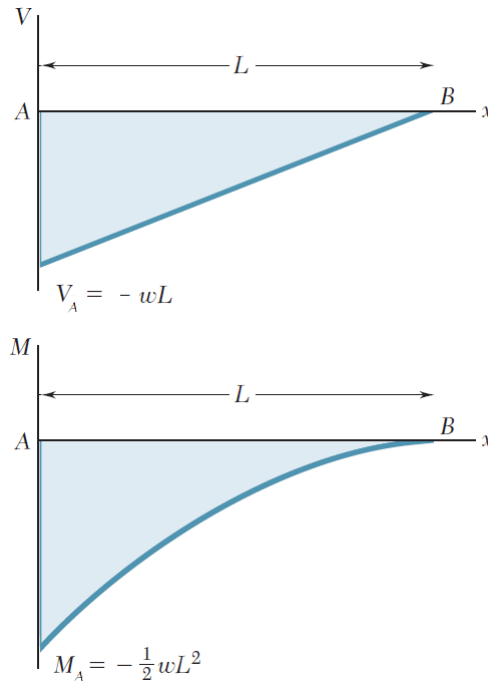


Figura 26 – Diagramas de esforço cortante ( $V$ ) e momento fletor ( $M$ ) da viga engastada.

utilizando o modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko, e em seguida, comparar os resultados para aferir se a escolha do modelo afeta o cálculo de esforços necessários para os ELU de um projeto estrutural.

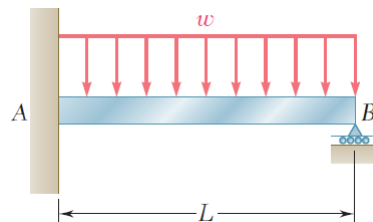


Figura 27 – Viga hiperestática engastada no ponto A e com suporte simples no ponto B.

Para calcular os esforços da viga hiperestática, precisamos primeiro calcular as reações do apoio com o auxílio das equações da estática e do Método das Forças. A Figura 28 ilustra o esquema de equacionamento do método das forças para cálculo da reação no ponto B, a qual foi transformada no hiperestático  $X_1$ .

Agora, precisamos calcular o valor dos deslocamentos  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$  utilizando o PTV. Começando pelo modelo de Euler-Bernoulli, consideramos somente a energia de deformação de flexão para o equacionamento. Da seção anterior, temos que  $\delta_{10} = \frac{wL^4}{8EI}$  e  $\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}$ , o que resulta em:

$$R_B = \frac{3}{8}wL, \quad (2.13)$$

onde vale já notar que os esforços desta estrutura para o modelo de Euler-Bernoulli independem da sua seção transversal.

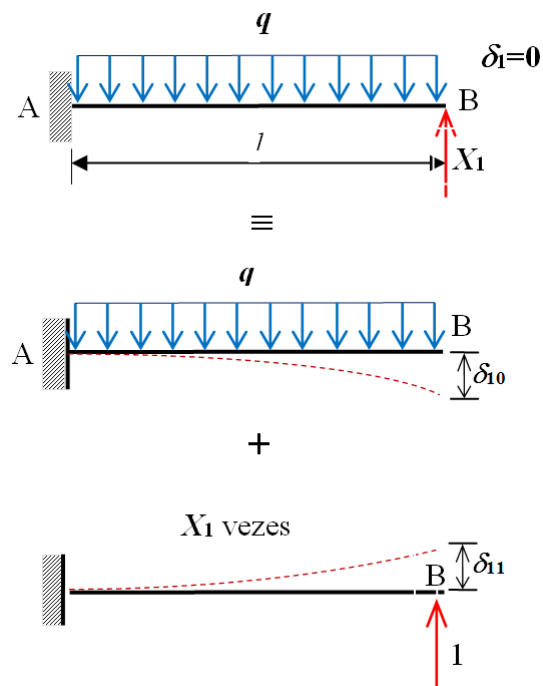


Figura 28 – Equacionamento do método das forças para cálculo da reação em B ( $R_B$ ).

Por exemplo, seja uma marquise feita com um perfil metálico VS:800x111 engastado-apoiado, com vão de 1 metro, supondo uma carga uniformemente distribuída de  $10\text{kN}/\text{m}$ :

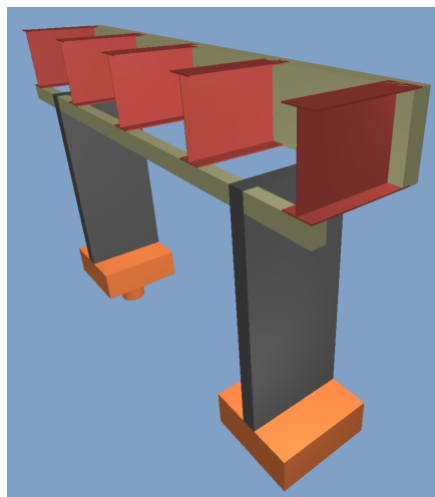


Figura 29 – Marquise com estrutura metálica.

As vigas metálicas da figura poderiam ser modeladas conforme a figura 27. Neste modelo, obtemos os seguintes diagramas e reações:

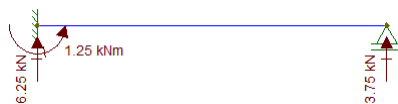


Figura 30 – Reações na viga.

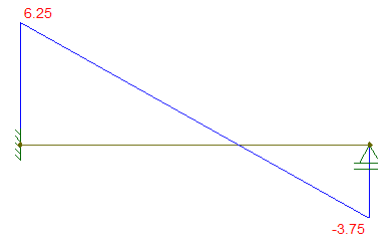


Figura 31 – Diagrama de esforço cortante.

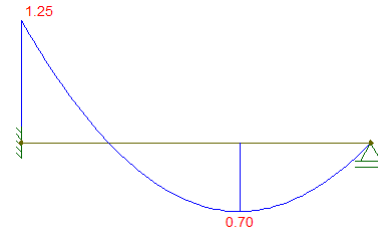


Figura 32 – Diagrama de momento fletor.

Vamos agora modelar a mesma estrutura utilizando a viga de Timoshenko. Para isto, consideramos a energia de deformação por cisalhamento no cálculo de  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$ . Começando por  $\delta_{10}$ , temos que:

$$\delta_{10} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx + \int_0^L f_c \frac{pP}{GA} dx = \frac{wL^4}{8EI} + f_c \frac{wL^2}{2GA}, \quad (2.14)$$

e

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI} + f_c \frac{L}{GA}. \quad (2.15)$$

Finalmente, chegamos na expressão da reação no ponto B:

$$R_B = X_1 = \frac{\frac{wL^4}{8EI} + f_c \frac{wL^2}{2GA}}{\frac{L^3}{3EI} + f_c \frac{L}{GA}}, \quad (2.16)$$

na qual notamos que  $R_B$ , e conseqüentemente os esforços na estrutura, dependem tanto da seção transversal como do material utilizado, pois a equação contém  $I$ ,  $A$ ,  $f_c$ ,  $E$  e  $G$ , e não conseguimos os cancelar como fizemos no caso da viga de Euler-Bernoulli. Desenvolvendo os termos da equação, podemos obter:

$$R_B = \frac{3wL}{8} \left( \frac{GAL^2 + 4f_cEI}{GAL^2 + 3f_cEI} \right) \quad (2.17)$$

Desta equação, percebe-se que a maior diferença de esforço se dá quando a parcela  $GAL^2$  tende a ser muito pequena em relação parcela  $f_cEI$ , caso em que o esforço no apoio B poderia ser na ordem de 30% maior que o calculado para a viga de Euler-Bernoulli. De fato, quando o

primeiro termo tende a zero em relação ao segundo, a reação de apoio em B poderia ser calculada como:

$$R_B = \frac{3wL}{8} \left( \frac{4f_c EI}{3f_c EI} \right) = \frac{3wL}{8} \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{wL}{2} \quad (2.18)$$

Fisicamente, este modelo estaria se comportando como uma viga bi-apoiada, resultando em duas reações de apoio iguais em A e B e nenhum momento no engaste. Estes casos podem ocorrer com seções em que a inércia é grande em relação à área da seção, em materiais com coeficiente de poisson grande (ou módulo de elasticidade transversal muito menor que o módulo de elasticidade longitudinal) ou principalmente em trechos curtos.

Usando este modelo de viga para calcular as reações no perfil da figura 29, obtemos os seguintes resultados:

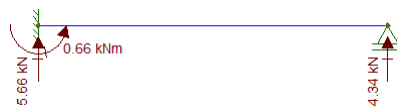


Figura 33 – Reações na viga.

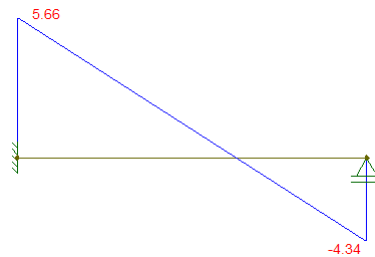


Figura 34 – Diagrama de esforço cortante.

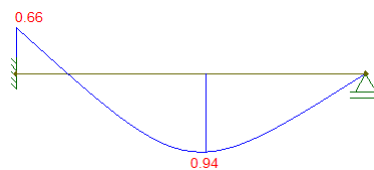


Figura 35 – Diagrama de momento fletor.

Comparando os diagramas do modelo de viga de Euler-Bernoulli com estes do modelo de Timoshenko, percebe-se uma diferença, mesmo que sutil, na distribuição dos esforços. Destaque para os momentos: no apoio foi reduzido quase pela metade e no vão o momento máximo positivo sofreu um aumento de mais de 30%.

Como principal conclusão dos resultados mostrados temos que o **modelo de viga escolhido influencia o valor dos esforços calculados no caso de estruturas hiperestáticas**. Como consequência, o modelo escolhido afeta diretamente o ELU de um projeto estrutural. Essa é a primeira diferença que encontramos entre estruturas isostáticas e hiperestáticas.

## 2.4 Efeito da hiperestaticidade no projeto de estruturas

Vale notar aqui que a Eq. (2.13) mostrou que, para a viga hiperestática da Seção 2.3, os esforços não dependiam do modelo no caso da viga de Euler-Bernoulli. Neste caso, o projeto da estrutura é facilitado e se assemelha com o projeto de estruturas isostáticas. Com isto em mente, a seguinte questão pode ser levantada: *todas as estruturas modeladas com a viga de Euler-Bernoulli tem este mesmo comportamento?* A resposta a esta pergunta é importante, pois este modelo de viga é amplamente utilizado em engenharia civil.

Ver notas de aula dias 21, 26 e 28 de março de 2019.